



**Pedro Afonso Teodoro
Faria Queiroz**

**Aplicação da equação de Bessel fracionária
na descrição da topografia da córnea**



**Pedro Afonso Teodoro
Faria Queiroz**

**Aplicação da equação de Bessel fracionária
na descrição da topografia da córnea**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Prof. Doutora Maria Manuela Fernandes Rodrigues, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

o júri

presidente

Prof. Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Milton dos Santos Ferreira
Professor Adjunto da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto
Politécnico de Leiria

Prof. Doutora Maria Manuela Fernandes Rodrigues
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

palavras-chave

Equação de Bessel, funções de Bessel, cálculo fracionário, operadores fracionários, topografia da córnea.

resumo

A visão é o sentido mais crucial que possuímos, uma vez que nos permite perceber o mundo de forma muito precisa. Com o avanço da tecnologia médica, o tratamento de diversas doenças oftalmológicas torna-se mais adequado e bem sucedido. Isso não seria possível sem os devidos modelos matemáticos da biomecânica do olho e seus constituintes. Uma das partes mais importantes do olho humano é a córnea, porque é responsável por cerca de dois terços do poder da refração. A descrição matemática da topografia da córnea é muito importante do ponto de vista dos oftalmologistas porque muitos dos distúrbios têm como origem algumas distorções na geometria da córnea. Pretende-se com este trabalho mostrar a aplicação da equação diferencial fracionária modificada de Bessel para o problema de descrição da topografia da córnea. A solução do problema é dada em termos de séries de potência. Esta solução tem um comportamento interessante no infinito que é uma generalização dos resultados clássicos para função de Bessel modificada de ordem 0.

keywords

Bessel equation, Bessel functions, fractional calculus, fractional operators, corneal topography.

abstract

Vision is the most crucial sense that we possess, once that enables us to observe the world in very precise way. With the advancement of medical technology, the treatment of various eye diseases becomes more appropriate and successful. This would not have been possible without the appropriate mathematical models of the biomechanics of the eye and its constituents. One of the most important parts of the human eye is the cornea, because it is responsible for about two-thirds of the power of refraction. The mathematical description of the corneal topography is very important from the point of view of the ophthalmologists because many disorders are caused by some distortions in the corneal geometry. The aim of this work is the application of a fractional modified differential equation to the problem of the corneal topography description. The solution of the problem is given in terms of power series. This solution has an interesting behaviour at infinity which is a generalization of the classics results for the modified Bessel function of order 0.

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Resumo	3
2	Preliminares	5
2.1	Funções Especiais	5
2.1.1	Função Gamma	5
2.1.2	Função Beta	8
2.1.3	Funções de Bessel	9
2.1.4	Funções de Bessel modificadas	12
2.2	Cálculo fracionário	14
2.2.1	Integração fracionária	15
2.2.2	Operadores fracionários de Riemann-Liouville	16
2.2.3	Operador de diferenciação fracionário de Caputo	20
3	Modelos associados à topografia da córnea	23
3.1	Teoria dos corpos elásticos (Shell theory)	23
3.2	Polinómios circulares de Zernik Vs funções circulares de Bessel	24
3.2.1	Métodos	25
4	Natureza da córnea	29
4.1	Contexto biológico	29
4.2	Derivação física	30
5	A equação fracionária de Bessel na topografia da córnea	37

Capítulo 1

Introdução

1.1 Resumo

A visão é o sentido mais precioso que temos. Através dela conseguimos captar verdadeiramente o mundo exterior e portanto, é essencial entender a sua mecânica a fim de, entre outras coisas, tratar as diversas doenças que a perturbam.

Com o avanço da tecnologia médica, o tratamento das variadas doenças visuais tem-se revelado cada vez mais adequado e sucedido. Isso não seria possível sem os devidos modelos matemáticos de biomecânica do olho e seus constituintes.

Uma das partes principais do olho, responsável por $\frac{2}{3}$ do poder de refração, é a córnea. Sendo uma das partes mais sensíveis no nosso corpo, as irregularidades que lhe estão associadas levam à formação de vários transtornos visuais. Doenças como miopia, hipermetropia e estigmatismo têm como origem anomalias na geometria da córnea, o que acentua a importância do conhecimento das suas características.

Pretende-se com este estudo, mostrar a aplicação de uma equação diferencial fracionária modificada de Bessel, para o problema de descrição da topografia da córnea. No caso em apreço, o modelo vai ser generalizado, e serão usadas derivadas fracionárias em vez das clássicas. A solução do problema será escrita em termos de séries de potências.

A solução encontrada tem um comportamento interessante no infinito, já que é uma generalização dos resultados clássicos para a função de Bessel modificada de ordem 0.

A equação fracionária de Bessel já tinha sido investigada em [24], contudo será analisada neste trabalho de um modo diferente.

Quanto à estrutura, este trabalho está organizado em cinco capítulos. No capítulo 2 (Preliminares) serão apresentadas funções especiais, nomeadamente a função Gamma, que aparece no decorrer da tese. E as funções de Bessel que estão diretamente ligadas com a equação modificada de Bessel, o cerne deste trabalho. Serão abordados neste

mesmo capítulo alguns conceitos sobre cálculo fracionário, após uma breve revisão sobre a sua origem e algumas aplicações que mais se destacaram até agora. Além disso, serão discutidos dois tipos de operadores fracionários, os operadores de Riemann-Liouville e de Caputo, assim como, algumas propriedades mais relevantes utilizadas na resolução do problema em questão.

No capítulo 3 são descritos alguns modelos associados à geometria da córnea. Serão explicados dois modelos com mais detalhe e introduzido um último em comparação com o segundo, já que normalmente estão relacionados.

O capítulo 4 está ligado à natureza da córnea. Divide-se em duas secções, a primeira faz uma exposição das propriedades biológicas da córnea e a segunda explica a derivação física e matemática de dois modelos não lineares que descrevem a sua topografia. Estes modelos estão relacionados com o adoptado.

Finalmente no capítulo 5, vai-se propor e analisar outro modelo, também ele baseado na derivação física e na equação da membrana. A solução encontrada é escrita em termos de serie de potências. Será também estudado o comportamento assintótico da solução e verificado que para casos particulares, se identificam com funções bem conhecidas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Funções Especiais

2.1.1 Função Gamma

A função Gamma, denotada por $\Gamma(z)$ é uma generalização da função fatorial $n!$, i.e., $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para os números complexos com parte real maior que zero, é definido da seguinte forma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad (2.1)$$

em que $\Re(z)$ é a parte real de z .

O integral (2.1) converge absolutamente e é conhecido como integral de Euler de primeira espécie. De facto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Para provar a convergência do integral $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ recorremos ao critério de comparação por passagem ao limite e usamos como termo de comparação o integral convergente $\int_1^{+\infty} t^{-2} dt$, i.e.:

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números positivos e

$$\begin{aligned} f : [1, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-t} t^{z-1} \end{aligned}$$

a função com as seguintes propriedades:

- $f(t) \geq 0$;

- $f(t)$ é decrescente;
- $f(n) = a_n$.

Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^{z-1}$ converge se e somente se $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ converge.

O teste da comparação do limite é uma generalização do teste da comparação.

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos. Então:

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, temos :

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Consideremos as séries $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^{z-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, então:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \\
 &\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
 &\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
 &\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots\right) \\
 &\leq 2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
 &\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots\right) \leq 2,
 \end{aligned}$$

e prova-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é absolutamente convergente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n} n^{z-1}}{n^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} n^{z+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z+1}}{e^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)n^z}{e^n} \quad (\text{Regra de L'Hôpital}) \\
&= \dots \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)!}{e^n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n} n^{z-1}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} n^{z+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z+1}}{e^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)n^z}{e^n} \quad (\text{Regra de L'Hôpital}) \\
&= \dots \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)!}{e^n} = 0
\end{aligned}$$

Uma vez que se verificam as duas condições, temos que o integral $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ é convergente.

Para provar a convergência do integral $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ faz-se a mudança de variável $u = \frac{1}{t}$. Assim:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{u}} u^{-z-1} du,$$

e facilmente se prova que o integral $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{u}} t^{-z-1} du$ converge, em comparação com o integral $\int_1^{+\infty} u^{-z-1} du = \left[-\frac{u^{-z}}{z} \right]_1^\infty < \infty$, quando $s > 0$, e portanto é convergente.

Propriedades

Uma das propriedades mais importantes da função Gamma é

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

Para provar (2.2) basta integrar (2.1) por partes, i.e.,

$$\Gamma(1+z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Pela análise da continuidade, segue que a função é estendida a todo o plano complexo exceto para os pontos $0, -1, -2, -3, \dots$, que são os seus pólos.

Temos então que:

$$\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Outras propriedades importantes são (ver [14]):

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$;
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;
- $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}) \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(\bar{z}) = |\Gamma(z)|^2 \in \mathbb{R}$.

Equação funcional:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Fórmula de duplicação de Legendre :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Teorema de multiplicação de Gauss-Legendre:

$$\Gamma(mz) = \frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right).$$

2.1.2 Função Beta

A função Beta é definida pelo integral:

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad \Re(z) > 0, \quad \Re(w) > 0. \quad (2.3)$$

Propriedades

A função Beta é simétrica em relação aos argumentos, ou seja, $\beta(z, w) = \beta(w, z)$.

Adicionalmente, $\beta(z, w)$, é por vezes usado por conveniência para substituir uma combinação de funções Gamma.

A relação entre a função Beta e a função Gamma é dada pela seguinte expressão:

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (2.4)$$

Quando x e y são inteiros positivos, segue da definição da função Gamma $\Gamma(z)$ que:

$$\beta(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}.$$

Fórmula de duplicação

Pretendemos deduzir a fórmula da duplicação para a função $\Gamma(z)$ (ver [1]). Temos que:

$$\begin{aligned} \beta\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma^2(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(2z + 1)}, \text{ relação (2.4) entre as função Beta e Gamma} \\ &= \int_0^1 t^{z-\frac{1}{2}}(1-t)^{z-\frac{1}{2}} dt, \text{ definição (2.3) da função Beta} \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^{z-\frac{1}{2}}(1-t)^{z-\frac{1}{2}} dt, \text{ a função integranda é par em relação a } t = \frac{1}{2} \\ &= 2^{-2z} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{z-\frac{1}{2}} dx, \text{ pela mudança de variável } 2t = 1 - \sqrt{x} \\ &= 2^{-2z} \beta\left(\frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right), \text{ definição (2.3) da função Beta,} \\ &= 2^{-2z} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z + 1)}, \text{ relação (2.4) entre a a função Beta e Gamma.} \end{aligned}$$

Pela igualdade entre a primeira e a última expressão, tem-se que:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z + 1) = 2^{-2z} \Gamma(z + 1) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (2.5)$$

i.e.,

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

que corresponde à fórmula de duplicação. Em particular, se $z = n \in \mathbb{N}$ em (2.5) obtemos:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$$

2.1.3 Funções de Bessel

Em matemática, as funções de Bessel, primeiro definidas pelo matemático Daniel Bernoulli e mais tarde generalizadas por Friedrich Bessel, são soluções canónicas $y(z)$ da equação diferencial de Bessel (ver [14]):

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2) y = 0, \quad (2.6)$$

onde ν é um número real ou complexo. O caso mais comum é quando ν é um número inteiro n , ainda que a solução para ν não inteiro seja idêntica. O número ν denomina a ordem das funções de Bessel associadas à dita equação.

Funções de Bessel de primeira espécie: J_ν

As funções de Bessel de primeira espécie de ordem ν são as soluções da equação diferencial de Bessel (2.6) que são funções finitas na origem ($x = 0$) para inteiros não negativos ν e divergem no limite $x \rightarrow 0$ para ν negativo não inteiro. Podemos definir a função $J_\nu(x)$ pela sua expansão em série de Taylor em torno do ponto $x = 0$ por:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (2.7)$$

onde $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ e $\nu \in \mathbb{C}$.

Esta função também pode ser escrita à custa da função hipergeométrica:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu + 1; -\frac{z^2}{4}\right), \quad (2.8)$$

onde

$${}_0F_1(c; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (z \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-) \quad (2.9)$$

e $(c)_k$ é chamado símbolo de Pochhammer, definido como:

$$\begin{aligned} (c)_k &= \frac{\Gamma(c + k)}{\Gamma(c)} \\ &= c(c + 1) \dots (c + k - 1). \end{aligned}$$

A série (2.7) é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim $J_\nu(x)$ é analítica em todo $z \in \mathbb{C}$.

Em particular, quando $\nu = -\frac{1}{2}$ e $\nu = \frac{1}{2}$ temos respetivamente:

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(z), \\ J_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z). \end{aligned}$$

A função de Bessel $J_\nu(z)$ também pode ser dada pela *representação integral de Poisson*:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \cos(zt) dt, \quad \left(\Re(\nu) > -\frac{1}{2}\right). \quad (2.10)$$

Os termos principais do comportamento assintótico de $J_\nu(z)$ perto de zero e do infinito são dados por:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu [1 + O(z)], \quad (z \rightarrow 0; \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-) \\ \text{e} \\ J_\nu(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad (|z| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

A função de Bessel de primeira espécie satisfaz a seguinte relação de recorrência diferencial, que em termos do operador $\delta = z \frac{d}{dz}$, tem a forma:

$$\begin{aligned} \delta^n [z^\nu J_\nu(z)] &= z^{\nu-n} J_{\nu-n}(z) \\ \text{e} \\ \delta^n [z^{-\nu} J_\nu(z)] &= (-1)^n z^{-\nu-n} J_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Funções de Bessel de segunda espécie : Y_ν

As funções de Bessel de segunda espécie, denotadas por $Y_\nu(z)$, são as soluções da equação diferencial de Bessel (2.6) que divergem na origem ($x = 0$).

A função $Y_\nu(z)$, também chamada de função de Neumann ou de Weber, para ν não inteiro, é definida a partir das funções de Bessel de primeira espécie $J_\nu(z)$ mediante a seguinte fórmula:

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)], \quad (\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}). \quad (2.11)$$

A função de Neumann $Y_\nu(z)$ tem o seguinte comportamento assintótico perto de zero e do infinito:

$$\begin{aligned} Y_\nu(z) &= -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu [1 + O(z)], \quad (|z| \rightarrow 0), \\ Y_\nu(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad (|z| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

As funções $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de Bessel (2.6).

A função de Neumann satisfaz uma relação de recorrência semelhante à anterior:

$$\begin{aligned} \delta^n [z^\nu Y_\nu(z)] &= z^{\nu-n} Y_{\nu-n}(z) \\ \text{e} \\ \delta^n [z^{-\nu} Y_\nu(z)] &= (-1)^n z^{-\nu-n} Y_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

onde $\delta = z \frac{d}{dz}$ e $n \in \mathbb{N}$.

2.1.4 Funções de Bessel modificadas

As funções de Bessel modificadas são semelhantes às funções de Bessel ordinárias mas estão relacionadas com a solução geral da equação de Bessel modificada:

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0. \quad (2.12)$$

Funções de Bessel modificadas de primeira espécie : I_ν

A função de Bessel modificada de primeira espécie $I_\nu(z)$ de ordem ν é dada por:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]). \quad (2.13)$$

Esta função também pode ser escrita à custa da função de Bessel de primeira espécie por:

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(e^{\pi i/2} z).$$

Analogamente a (2.10), $I_\nu(z)$ tem a sua *representação integral de Poisson* dada por:

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cosh(zt) dt, \quad \left(\Re(\nu) > -\frac{1}{2} \right). \quad (2.14)$$

Os termos principais do comportamento assintótico de $I_\nu(z)$ perto de zero e do infinito são dados por:

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu [1 + O(z)], \quad (z \rightarrow 0; \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-) \\ \text{e} \\ I_\nu(z) &= \left(\frac{\pi z}{2} \right)^{1/2} e^z \left[1 + O\left(\frac{1}{z} \right) \right] + i e^{-z+\nu\pi i} \left[1 + O\left(\frac{1}{z} \right) \right], \quad \left(|z| \rightarrow \infty; -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

A função de Bessel modificada $I_\nu(z)$ satisfaz a seguinte relação de recorrência :

$$\begin{aligned} \delta^n [z^\nu I_\nu(z)] &= z^{\nu-n} I_{\nu-n}(z) \\ \text{e} \\ \delta^n [z^{-\nu} I_\nu(z)] &= z^{-\nu-n} I_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

onde $\delta = z \frac{d}{dz}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Funções de Bessel modificadas de segunda espécie : K_ν

A função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem ν , ou *função Macdonald* $K_\nu(z)$ define-se a partir da função de Bessel modificada de primeira espécie, para ordens não inteiras, mediante a seguinte fórmula:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} [\cos(\nu\pi) I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \quad (\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}). \quad (2.15)$$

Esta função também pode ser representada através do integral:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-\nu-1} \exp \left[-\frac{z}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right] dt, \quad (\Re(z) > 0). \quad (2.16)$$

No entanto, para $0 < \Re(z) < \frac{1}{2}$, temos que:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu + 1/2)} \left(\frac{2}{z} \right)^\nu \int_1^\infty (t^2 - 1)^{-\nu-1/2} e^{-zt} dt. \quad (2.17)$$

A representação assintótica perto de zero e do infinito é dada por:

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{z} \right)^\nu [1 + O(z)], \quad (z \rightarrow 0, \Re(\nu) > 0) \\ &\text{e} \\ K_\nu(z) &= \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z} \right) \right], \quad \left(|z| \rightarrow \infty, |\arg(z)| < \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

As funções $I_\nu(z)$ e $K_\nu(z)$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial de Bessel (2.12).

A *função de Macdonald* $K_\nu(z)$ satisfaz uma relação semelhante às anteriores, dada por:

$$\begin{aligned} \delta^n [z^\nu K_\nu(z)] &= (-1)^n z^{\nu-n} K_{\nu-n}(z) \\ &\text{e} \\ \delta^n [z^{-\nu} K_\nu(z)] &= (-1)^n z^{-\nu-n} K_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

onde $\delta = z \frac{d}{dz}$ e $n \in \mathbb{N}$.

É de notar que as funções $Y_\nu(z)$ e $K_\nu(z)$ têm propriedades de simetria relativamente aos índices, dadas por:

$$\begin{aligned} Y_{-n}(z) &= Y_n(z), \quad (n \in \mathbb{N}) \\ &\text{e} \\ K_{-\nu}(z) &= K_\nu(z), \quad (\nu \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2.2 Cálculo fracionário

O conceito de cálculo fracionário tem sido alvo de uma grande popularidade e importância durante as últimas quatro décadas, devido essencialmente às suas aplicações, já provadas, em numerosos e diversos campos da ciência e engenharia (ver p.ex. [12], [10], [27]). Também podem ser encontradas em [14] e [22] introduções abrangentes sobre cálculo fracionário e algumas das suas aplicações.

O cálculo fracionário tem como objetivo determinar o valor de integrais e derivadas de ordem arbitrária (real ou complexa), i.e., uma generalização à diferenciação e integração de ordem inteira. Este fornece-nos várias ferramentas, úteis na resolução de equações diferenciais, equações integrais, e muitos problemas que envolvem funções especiais, assim como as suas generalizações em uma ou mais variáveis.

A origem do cálculo fracionário é popularmente atribuída a L'Hôpital, quando este envia uma carta escrita ao seu amigo Leibniz, à data de 30 de Setembro de 1695, na qual aborda o significado da notação de Leibniz $\frac{d^n y}{dx^n}$ (usualmente conhecida) para a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ quando $n = \frac{1}{2}$, i.e., a interpretação de uma derivada de ordem $\frac{1}{2}$ é proposta e discutida (ver [14]).

A resposta de Leibniz ao seu amigo, juntamente com a contribuição de inúmeros matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville e outros, levaram às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não inteiras. Em 1819, no seu livro intitulado "Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral" (Second edition; Courcier, Paris, 1819), S.F.Lacroix dedica duas páginas (p. 409-410) mostrando eventualmente que:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} v}{dv^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}}$$

Operadores de derivadas e integrais fracionários, que se baseiam essencialmente nas conhecidas fórmulas de integrais de Cauchy-Goursat foram abordados por Sonin em 1869, Letnikov em 1868 e Laurant em 1884 (entre outros).

No final do século XIX, as definições propostas por Riemann-Liouville e Grunwald-Letnikov vieram finalmente confirmar que as definições anteriores pareciam estar completas.

Até finais do século passado, o desenvolvimento do cálculo fracionário deu-se exclusivamente no campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas. Contudo, em 1969 M. Caputo, no seu livro *Elasticità e Dissipazione*, resolveu problemas de viscoelasticidade utilizando uma nova definição, proposta por ele, para a derivada de ordem fracionária. Por outro lado, a chamada derivada fracionária de Grunwald-Letnikov, mostrou-se bastante eficiente para resolver problemas numéricos.

A partir das definições introduzidas por Caputo e Grunwald-Letnikov, diversos autores mostraram que modelos baseados no cálculo fracionário ofereciam uma descrição mais fina de fenômenos naturais do que aquela feita a partir do cálculo usual.

O primeiro trabalho dedicado unicamente ao cálculo fracionário é um livro de Oldham e Spanier [20], publicado em 1974. De entre os trabalhos mais recentes, está o livro [21], que aborda essencialmente equações diferenciais fracionárias.

Mais recentemente, vários autores têm demonstrado a utilidade deste tipo de operadores fracionários na obtenção de soluções particulares de inúmeras famílias de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas (e não homogêneas), tal como equações em derivadas parciais, homogêneas e não homogêneas.

2.2.1 Integração fracionária

Existem diferentes definições para os operadores de integração fracionária que, no geral, não coincidem, chamados operadores fracionários de Riemann-Liouville e Caputo (ver [11], [14], [21]).

O primeiro operador fracionário a introduzir será o de integração fracionária. Este operador é uma generalização da integração iterativa sequencial de ordem inteira para uma ordem real qualquer. Começa-se por expressar qualquer integral iterativo de ordem n por uma integração simples, usando a fórmula de Cauchy para integrações repetidas.

Proposição 2.2.1 *A fórmula de Cauchy para integrações repetidas (ver [20], [21]).*

Seja f uma função continua no intervalo $[a, b]$. o integral sucessivo de ordem n de f de base a :

$$J^n f(x) = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1$$

é dado pela integração simples:

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

válida para $n \in \mathbb{N}$, $a, t \in \mathbb{R}$, $t > a$.

Se n for substituído por um número real positivo α e $(n-1)!$ pela sua generalização $\Gamma(\alpha)$, obtemos uma fórmula para a integração fracionária.

Prova:

A prova é feita por indução.

Consideremos o caso base $n = 1$. Temos então que :

$$\begin{aligned}
 J^1 f(x) : &= \int_a^x f(\sigma_1) d\sigma_1 \\
 &= \frac{1}{(0)!} \int_a^x (x-t)^0 f(t) dt \\
 &= \frac{1}{(1-1)!} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) d\tau
 \end{aligned}$$

e a expressão mantém-se válida para $n = 1$.

Agora vamos supor que a expressão se verifica para um n arbitrário. Vai provar-se para $n + 1$, trocando a ordem de integração:

$$\begin{aligned}
 J^{n+1} f(x) &= \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_n} f(\sigma_{n+1}) d\sigma_{n+1} d\sigma_n \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \\
 &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{\sigma_1} (\sigma_1 - t)^{n-1} f(t) dt d\sigma_1 \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_t^x (\sigma_1 - t)^{n-1} f(t) d\sigma_1 dt \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{1}{n} [(\sigma_1 - t)^n]_t^x f(t) dt \\
 &= \frac{1}{n!} \int_a^x ((x-t)^n - (t-t)^n) f(t) dt \\
 &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt.
 \end{aligned}$$

■

2.2.2 Operadores fracionários de Riemann-Liouville

Nesta secção iremos apresentar as definições para os integrais fracionários e derivadas fracionárias de Riemann-Liouville num intervalo limitado do eixo real, assim como algumas das suas propriedades no espaço das funções contínuas e somáveis (ver [25]).

Definição 2.2.2 *Seja $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) um intervalo limitado do eixo real \mathbb{R} . Os integrais fracionários de Riemann-Liouville $I_{a+}^\alpha f$ e $I_{b-}^\alpha f$ de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) são definidos como:*

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (x > a, \Re(\alpha) > 0), \quad (2.18)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad (x < b, \Re(\alpha) > 0), \quad (2.19)$$

respetivamente. Estes integrais são chamados de integrais fracionários à esquerda e à direita.

Quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, as definições (2.18) e (2.19) coincidem com a fórmula de Cauchy para integrações repetidas.

Depois de uma introdução ao operador de integração fracionária é necessário definir também o operador de diferenciação fracionário.

Definição 2.2.3 *As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha} f$ e $D_{b-}^{\alpha} f$ de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\Re(\alpha) \geq 0$) são definidas por:*

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; x > a), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha} f)(x) &= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; x < b), \end{aligned} \quad (2.21)$$

respetivamente, onde $[\Re(\alpha)]$ representa a parte inteira de $\Re(\alpha)$.

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$ temos:

$$(D_{a+}^n f)(x) = y^{(n)}(x), \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(D_{b-}^n f)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), \quad (n \in \mathbb{N}),$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a derivada clássica de $y(x)$ de ordem n .

Se $0 < \Re(\alpha) < 1$, então:

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; x > a) \quad (2.22)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; x < b). \quad (2.23)$$

Quando $\alpha \in \mathbb{R}^+$, as expressões (2.20) e (2.21) tomam as seguintes formas:

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (n = [\alpha] + 1; x > a), \quad (2.24)$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (n = [\alpha] + 1; x < b), \quad (2.25)$$

onde $[\alpha]$ representa a parte inteira de α .

Propriedades

Por convenção:

$$I^0 f(t) := f(t), \quad D^0 f(t) := f(t)$$

i.e., $I^0 := I$ e $D^0 = I$ são operadores identidade.

Se $\Re(\alpha) \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{C}(\Re(\beta) > 0)$ então:

- $(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) := \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) > 0)$
- $(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) := \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) \geq 0)$
- $(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(x) := \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) > 0)$
- $(D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(x) := \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) \geq 0).$

Em particular, se $\beta = 1$ e $\Re(\alpha) \geq 0$, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante não é, no geral, igual a zero:

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (D_{b-}^{\alpha}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1).$$

Por outro lado, para $j = 1, 2, \dots, [\Re(\alpha)] + 1$:

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0, \quad (D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\alpha-j})(x) = 0.$$

Outra propriedade importante é a linearidade do operador:

- $I_{a+}^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I_{a+}^{\alpha}f(t) + I_{a+}^{\alpha}g(t), \quad \alpha \in \mathbf{R}_+, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$
- $D_{a+}^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda D_{a+}^{\alpha}f(t) + D_{a+}^{\alpha}g(t), \quad \alpha \in \mathbf{R}_+, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$

O mesmo se verifica para I_{b-}^{α} e D_{b-}^{α} .

Se $f(t)$ é contínua para $t \geq 0$ verifica-se a seguinte igualdade (ver [21], p. 65-67):

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I^{\alpha} f(t) = f(t).$$

Lema 2.2.4 (ver [14])

Se $\Re(\alpha) > 0$ e $\Re(\beta) > 0$ então as equações

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (2.26)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (2.27)$$

são satisfeitas para quase todos os pontos $x \in [a, b]$, com $f(x) \in L_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

Se $\alpha + \beta > 1$, então as relações (2.26) e (2.27) verificam-se em qualquer ponto de $[a, b]$.

Diz-se que $f(x) \in L_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, se $f(x)$ é dita p-integrável e sua norma L_p é finita:

$$\|f(x)\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

A próxima afirmação mostra que a diferenciação fracionária é a operação inversa à esquerda da integração fracionária.

Lema 2.2.5 (ver [14])

Se $\Re(\alpha) > 0$ e $f(x) \in L_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, então as seguintes igualdades

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad (2.28)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x), \quad (2.29)$$

são satisfeitas para quase todos os pontos $x \in [a, b]$, com $f(x) \in L_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

Lema 2.2.6 (ver [14])

Se $\Re(\alpha) > 0$ e $\Re(\beta) > 0$, então, para $f(x) \in L_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, as relações

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x) \quad (2.30)$$

e

$$(D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha-\beta} f)(x), \quad (2.31)$$

verificam-se para quase todos os pontos de $[a, b]$.

Em particular, quando $\beta = k \in \mathbb{N}$ e $\Re(\alpha) > k$, temos:

$$(D_{a+}^k I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-k} f)(x) \quad (2.32)$$

e

$$(D_{b-}^k I_{b-}^{\alpha} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha-k} f)(x). \quad (2.33)$$

Para a próxima propriedade será usado o espaço de funções $I_a^\alpha(L_p)$ e $I_b^\alpha(L_p)$, definidas para $\Re(\alpha) > 0$ e $(1 \leq p \leq \infty)$ por:

$$I_{a+}^\alpha(L_p) := \{f : f = I_a^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p(a, b)\} \quad (2.34)$$

e

$$I_b^\alpha(L_p) := \{f : f = I_b^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p(a, b)\} \quad (2.35)$$

respetivamente.

A composição do operador de integração fracionária I_a^α com o operador de diferenciação fracionária D_a^α é dado pelo seguinte resultado.

Lema 2.2.7 (*ver [14]*)

Seja $\Re(\alpha) > 0$, $n = [\Re(\alpha)] + 1$ e seja $f_{n-\alpha}(x) = (I_a^{n-\alpha} f)(x)$ o integral fracionário (2.18) de ordem $n - \alpha$

1. Se $(1 \leq p \leq \infty)$ e $f(x) \in I_{a+}^\alpha(L_p)$, então:

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x). \quad (2.36)$$

2. Se $f(x) \in L_1(a, b)$ e $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$, então a igualdade:

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}, \quad (2.37)$$

verifica-se para quase todo os pontos de $[a, b]$.

Denota-se por $AC^n[a, b]$ o espaço das funções complexas $f(x)$ que têm derivada contínua até à ordem $n - 1$ em $[a, b]$, tal que $f^{n-1}(x) \in AC[a, b]$, onde $AC[a, b]$ é designado pelo espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$.

2.2.3 Operador de diferenciação fracionário de Caputo

Nesta secção é apresentado um operador alternativo ao operador de diferenciação fracionária de Riemann-Liouville (2.18).

Definição 2.2.8 *Seja $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, t, a \in \mathbb{R}$. O operador fracionário:*

$$D_*^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.38)$$

é chamado operador derivada fracionária de Caputo ou diferencial fracionário de Caputo de ordem α , em que $f^{(n)}$ é a derivada de ordem n da função f .

Este operador foi introduzido pelo matemático Italiano Caputo em 1967 (ver p.ex. [6]).

Exemplo 2.2.9 *Seja $a = 0, \alpha = \frac{3}{2}, (n = 2), f(t) = t^2$. Então aplicando a fórmula (2.38) temos:*

$$D_*^{\frac{3}{2}} t^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{f^{(2)}(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau.$$

Calcula-se o valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$, faz-se a mudança de variável $u = (t-\tau)^{\frac{1}{2}}$ e temos que o valor final para a derivada fracionária de Caputo para a função $f(t) = t^2$ é:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\tau) &= 2 \\ u &= (t-\tau)^{\frac{1}{2}} \implies du = -\frac{1}{2}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\ d\tau &= -2(t-\tau)^{\frac{1}{2}} du = -2u du \\ D_*^{\frac{3}{2}} t^2 &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{2u}{u} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Temos então

$$D_*^{\frac{3}{2}} t^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}.$$

Motivação:

Para ilustrar algumas vantagens do operador de Caputo, vamos considerar alguns problemas com valor inicial (ver [14], [25]):

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) - \lambda y(t) = 0, & t > 0, \quad n-1 < \alpha < n, \\ [D^{\alpha-k-1} y(t)]_{t=0} = b_k, & k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) - \lambda y(t) = 0, & t > 0, \quad n-1 < \alpha < n, \\ y^{(k)}(0) = b_k, & k = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

Relativamente ao problema onde figura a derivada fracionária de Riemann-Liouville, é de salientar que até nas condições iniciais são requeridas derivadas fracionárias. Este tipo de problemas podem ser resolvidos facilmente em termos teóricos, no entanto, as suas soluções são praticamente inúteis, já que não se conseguem extrair interpretações físicas claras deste tipo de condições iniciais (ver p.ex. [21], p. 78). Por outro lado no problema fracionário de Caputo estão envolvidas condições iniciais nas derivadas de ordem inteira. Estas condições iniciais têm claramente interpretação física como o valor inicial $y(0)$ no

ponto 0 (onde y é a função desconhecida), a velocidade inicial $y'(0)$, a aceleração inicial $y''(0)$, etc.

A derivada fracionária de Caputo é mais restrita, como se pode verificar em (2.18) e (2.19), uma vez que é necessária a n -ésima derivada da função. Felizmente, a maior parte das funções que aparecem nestas aplicações cumprem estes requisitos.

É também de destacar a diferença no operador de Riemann-Liouville, para o qual

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t),$$

enquanto que para o operador de Caputo:

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} D_*^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

Capítulo 3

Modelos associados à topografia da córnea

Atualmente, já conseguimos distinguir muitos modelos matemáticos que descrevem a topografia da córnea. Geralmente são usadas superfícies de revolução cujos meridianos são secções cónicas, como parábolas ou elipses, para descrever a secção transversal da córnea(ver p.ex. [23], [13]). A grande desvantagem destes modelos é que quase não têm motivação física.

Talvez o modelo mais apropriado para descrever a geometria da córnea seja o baseado na "shell theory", mas normalmente são modelos muito complexos e difíceis de analisar. Existem modelos que usam polinómios circulares de Zernike, i.e., são determinados polinómios ortogonais no disco unitário para modelar as aberrações na córnea ou no cristalino. A par destes, aparecem as funções circulares de Bessel para completar alguns casos em que os anteriores não devem ser aplicados. Alguns autores propõem modelos computacionais da biomecânica da córnea, com base em métodos de elementos finitos. Existem também modelos que utilizam métodos de séries de Fourier para descrever a forma do cristalino.

É de destacar que, para além dos modelos puramente teóricos e matemáticos, já são criadas réplicas físicas de um olho em condições normais. Estes objetos ajudam a testar e analisar vários equipamentos médicos, sem a necessidade de envolver os doentes.

3.1 Teoria dos corpos elásticos (Shell theory)

Um "escudo"(shell) é um tipo de elemento estrutural caracterizado pela sua geometria. É um corpo elástico tridimensional que ocupa uma pequena vizinhança de uma subvariedade bidimensional de \mathbb{R}^3 (ver p.ex. [9]).

O grande objectivo da "shell theory" é fazer uma previsão da alteração da forma e do deslocamento de um corpo elástico em resposta à aplicação de forças dadas, ou condições de fronteira. Por esta razão, existe um grande interesse em estudar este tipo de corpos, tanto os naturais, como os construídos pelo Homem. Os corpos elásticos podem apresentar uma grande força, mas em contrapartida, os seus comportamentos também podem ser muito difíceis de prever, e falhar de forma catastrófica.

Tal antevisão é feita através da resolução de um sistema de equações diferenciais parciais ou minimizando uma função que pode ser definida para duas ou três variáveis (em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3), dependendo se o corpo é visto na sua configuração de referência como um objeto bidimensional ou tridimensional. Esta última é a formulação abstrata ideal, quando o objeto físico tem a dimensão "espessura" infinitesimal, quando comparada com as outras.

A teoria de corpos elásticos para o caso tridimensional caracteriza-se pela configuração de referência do corpo em questão ser substituída por a de um "escudo". Neste caso, a forma particular da configuração de referência não representa qualquer papel na teoria. Em contraste com o caso tridimensional, a teoria de corpos elásticos bidimensional é exclusiva para "escudos", uma vez que depende unicamente da geometria da configuração de um "escudo".

Para uma compreensão mais detalhada desta teoria, sugere-se a leitura de [7] e [8].

3.2 Polinómios circulares de Zernik Vs funções circulares de Bessel

A origem dos polinómios circulares de Zernik pode ser atribuída a uma teoria da física-matemática conhecida como teoria de Sturm-Liouville (S-L) (ver [26]).

No campo da visão e da ótica visual existem um grande número de superfícies relacionadas, quer com a anatomia e fisiologia do olho, quer com instrumentos ópticos, concebidos para estimar e corrigir anomalias visuais. Quando são realizados testes óticos, a maior dificuldade está na interpretação dos resultados. É importante medir e modelar matematicamente estas superfícies, a fim de estudar as suas propriedades. Para isso, é conveniente exprimir a onda obtida sob a forma polinomial. Os polinómios circulares de Zernik (PCZ) são muitas vezes utilizados para este propósito, pois têm na sua constituição termos, que se identificam com os tipos de aberrações presentes na onda obtida, observada nos exames ópticos. Os PCZ são funções padrão que descrevem as frentes de onda das aberrações presentes no olho humano e servem também para modelar a superfície corneana.

No entanto, nem sempre os polinómios circulares de zernik são os mais adequados para descrever os resultados. Por vezes estes revelam-se pouco eficazes na caracterização da

onda obtida. Existem alguns estudos que mostram as suas limitações, particularmente, quando usados para modelar superfícies oftálmicas complexas que detêm conteúdos com alta frequência espacial, ou então, quando aplicadas a "descontinuidades" resultantes de intervenções cirúrgicas. Temos também o caso em que o polinómio toma um valor baixo quando a turbulência do ar está presente. Os erros de fabrico associados ao processo de focagem não podem ser representados usando um número aceitável de termos no polinómio e quando se efetuam testes com objetos óticos cónicos, têm de ser adicionados termos ao polinómio para refinar a representação dos alinhamentos dos erros. Um uso não cuidado deste tipo de polinómios podem levar a soluções descabidas.

Deste modo, os polinómios circulares de Zernik são um membro de um número infinito de classes de famílias completas de polinómios em duas variáveis, r e φ , que são ortogonais em uma faixa contínua no interior do disco unitário e geralmente não são ortogonais a conjuntos discretos de pontos dentro do círculo unitário. Isto significa que a sua soma pode ser usada para aproximar qualquer superfície definida nesse domínio.

Têm sido propostas representações funcionais alternativas para descrever superfícies oftálmicas, que vão desde funções cónicas generalizadas a representações mais complicadas, como os polinómios de Zernik fracionários e harmónicos esféricos. Porém, cada uma destas abordagens apresenta certas vantagens e desvantagens em comparação com os PCZ. Tal como nos PCZ, nenhum deles é capaz de lidar adequadamente com um possível conteúdo de alta frequência espacial, existente na superfície oftálmica.

Pelas desvantagens mencionadas, surgem naturalmente as Funções Circulares de Bessel (FCB). Elas aparecem em muitos problemas de duas dimensões, com simetria cilíndrica, para compensar os casos em que os PCZ não podem ser aplicados.

Este conjunto de funções tem sido usado em diferentes campos, que vão desde analisar o impacto da elevação da cratera, até à modelação da superfície na sua configuração padrão. Devido a ter um comportamento mais uniforme e radial quasi-periódico, as FCB verificam vantagens sobre os PCZ a aproximar superfícies com conteúdos de alta frequência.

De seguida será descrita a aplicabilidade das FCB na modelação de superfícies oftálmicas, assim como a avaliação das vantagens e desvantagens da representação das BCF em relação aos dos PCZ (ver [26]).

3.2.1 Métodos

Representação de funções

Os PCZ foram inicialmente obtidos por Nijboer pela aplicação da teoria S-L. No geral, esta teoria permite construir conjuntos completos e ortogonais de funções ou termos.

Tanto os PCZ como as FCB são obtidos pela aplicação da teoria S-L a um caso parti-

cular de uma equação de derivadas parciais, em duas variáveis, rotacionalmente invariante (EDPRI), com uma escolha diferente de parâmetros e condições de fronteira. Deste modo, as soluções correspondentes aos PCZ e às FCB são ambas obtidas como um produto separável das funções azimutal e radial.

Para ambos, o fator azimutal é dado por:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \sin(m\varphi) \quad \text{para } m \text{ ímpar} \\ \phi_m &= \cos(m\varphi) \quad \text{para } m \text{ par.}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Estas funções também podem ser expressas na sua forma complexa por:

$$\phi = \exp(\pm im\varphi).$$

Esta escrita não deve ser meramente considerada como uma representação alternativa para o seno e cosseno, uma vez que tem interpretações físicas importantes.

Para os PCZ, a representação mais usual da sua função radial é dada por:

$$R_n^{|m|}(r) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+|m|}{2} - s\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - s\right)!} r^{n-2s},\tag{3.2}$$

onde $n \geq m$, de modo a que a paridade do polinómio seja a mesma que o n correspondente.

Agrupando agora os termos radial e azimutal nas duas variáveis, temos que os PCZ são dados, na sua forma normalizada por:

$$Z_n^m(r, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m,0}}} R_n^{|m|}(r) \cos(m\varphi), & m \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m,0}}} R_n^{|m|}(r) \sin(m\varphi), & m < 0. \end{cases}\tag{3.3}$$

As propriedades matemáticas dos PCZ têm sido extensivamente estudados e amplamente discutidas (ver p.ex. [4], [16]).

A cada um dos termos dos polinómios de Zernik está associado um número, conhecido como valor próprio, dado por $\gamma = n(n+2)$, que aparece na EDPRI, mencionada acima, ou seja, estes valores próprios provêm da teoria S-L. A importância destes valores próprios vem do facto de serem usados para determinar um esquema ordenado para a pirâmide de Zernik, como foi descrito por Mahajan em [15].

No entanto, mediante uma escolha diferente de parâmetros e condições de fronteira na EDPRI, a solução radial não é mais a função radial dos polinómios de Zernike, mas sim as funções de Bessel de primeira espécie

3.2. POLINÓMIOS CIRCULARES DE ZERNIK VS FUNÇÕES CIRCULARES DE BESSEL27

$$J_m(c_{mk}r) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!(m+s)!} \left(\frac{c_{mk}r}{2}\right)^{m+2s}. \quad (3.4)$$

É de destacar que as funções de Bessel de primeira espécie são séries de potências com infinitos termos, ao contrário do termo radial dos PCZ que tem um numero finito de termos. São funções oscilatórias quasi-periódicas e o seu envelope decai a uma taxa de $1/(cr)^{1/2}$ à medida que o argumento cr cresce.

De seguida serão expostos gráficos comparativos para os dois casos mencionados acima.

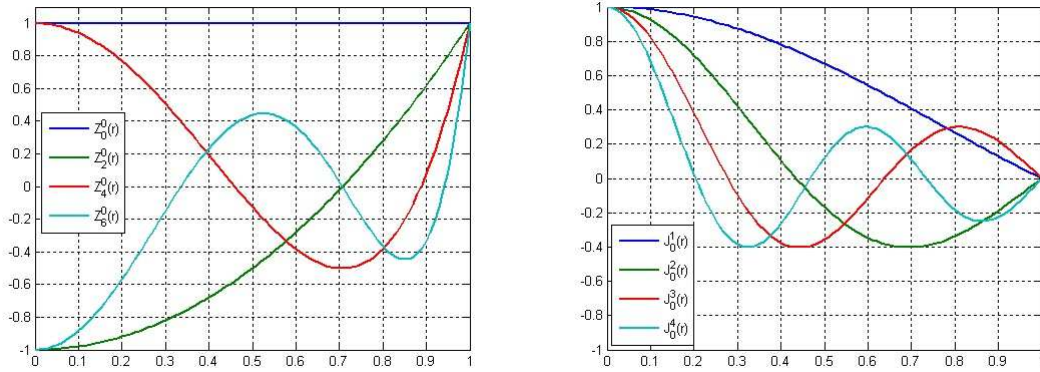


Figura 3.1: Representação da função radial dos PCZ $(Z_n^{(m)}(r))$ para $m = 0$, $n = 0, 2, 4, 6$ e função de Bessel de primeira espécie $(J_m(c_{mk}r))$ para $m = 0$, $n = 1, 2, 3, 4$.

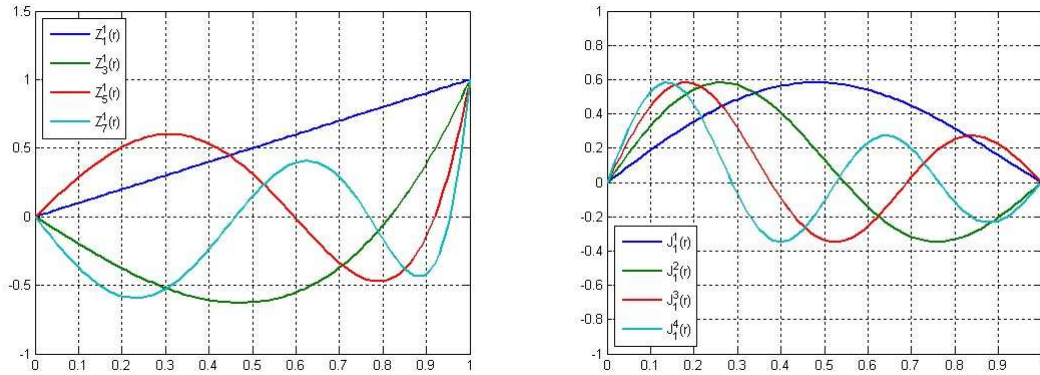


Figura 3.2: Representação da função radial dos PCZ $(Z_n^{(m)}(r))$ para $m = 1$, $n = 1, 3, 5, 7$ e função de Bessel de primeira espécie $(J_m(c_{mk}r))$ para $m = 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.

Apesar da ordem radial das funções de Bessel de primeira espécie ser inferior, o número de interseções com o eixo horizontal é o mesmo.

Observação: Em física e engenharia, o envelope de um sinal oscilatório é uma curva suave que delimita os seus extremos, ou seja, o envelope generaliza o conceito de uma frequência constante. Podemos ver na Figura 3.3 um exemplo ilustrativo do envelope de uma onda de seno modulado variando entre a parte superior e a parte inferior. A função envelope pode ser uma função de tempo, espaço, ângulo, ou mesmo de qualquer outra variável.

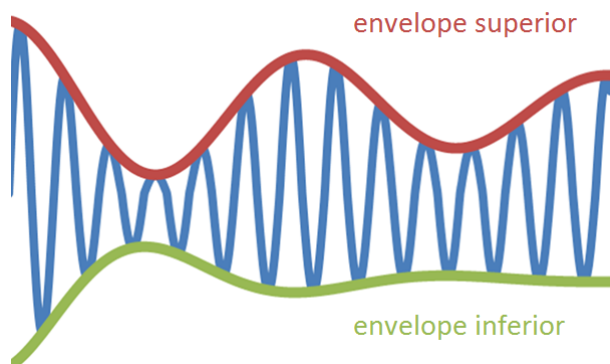


Figura 3.3: Envelope superior e inferior de uma onda de seno modulado

Conclusão dos métodos

Apresentamos as funções circulares de Bessel, também elas ortogonais no círculo unitário e comparamos com os Polinômios Circulares Zernike, conhecidos para ajustar várias superfícies que representam casos comuns no campo de ótica visual.

Com base em [26], percebeu-se que as FCB têm um comportamento muito bom, tornando-se assim um candidato competitivo aos PCZ para representar todos os tipos de superfícies frontais da córnea. Mostraram um melhor comportamento na modelação de superfícies que apresentam uma variação abrupta, como é o caso da camada externa do olho na região do limbus. Verificou-se também que as FCB são adequadas para estudar características particulares das superfícies corneanas pós-cirúrgicas. Quanto aos PCZ, estes tem a desvantagem de o valor m associado à ordem da função azimutal restringir o valor de n correspondente na função radial da mesma ordem. Isto não acontece na FCB, onde é possível obter este tipo de funções para qualquer combinação de ordens nas funções azimutal e radial. Deste modo, as FCB possuem esta vantagem para representar superfícies com simetria radial, mesmo quando há descontinuidades na primeira derivada (ver [26]).

Capítulo 4

Natureza da córnea

Nesta tese, vai ser adotado um modelo que está relacionado com um outro modelo não linear, que caracteriza a topografia da córnea (ver [19]).

Assumindo simetria relativamente ao raio, procede-se à derivação física para obter a equação diferencial não linear que descreve a geometria da córnea.

Tendo como base [19], estamos perante um problema com duas condições de fronteira e é possível mostrar que a equação tem uma solução única para determinados valores dos seus parâmetros. A condição de fronteira que é requerida na função, assim como a primeira derivada advêm de raciocínios físicos. Em [5] também podem ser vistas questões de existência equivalentes na abordagem a alguns problemas de Sturm-Liouville.

Em [19], o problema é formulado como uma equação integral não linear e de seguida são efetuadas algumas estimações para obter a solução exata. Para uma análise semelhante deste tipo de problemas integrais não lineares, ver p.ex. [17] A solução aproximada é baseada na função cosseno hiperbólico e encaixa nos dados óticos originais com um erro da ordem de 1%.

4.1 Contexto biológico

Devido às suas funcionalidades, a córnea deve ser o mais transparente possível, de modo a cumprir as melhores propriedades de refração. É uma estrutura, que é uma espécie de escudo/concha com cerca de 11 mm de diâmetro, 0.5 mm de espessura no centro e 0.7 mm na parte periférica. Devido aos seus parâmetros estruturais, a córnea é muito duradoura e resistente, e por isso proporciona uma proteção mecânica natural às partes internas do olho.

A córnea é composta por seis camadas que conseguem ser identificadas quando é usado um microscópio ótico. Por ordem, a partir da parte mais exterior temos: Epitélio corneano,

Membrana de Bowman, Estroma, Camada de Dua, Membrana de Descemet, Endotélio. Contudo, a cada camada estão associadas importantes propriedades biológicas.

Por exemplo, o estroma é responsável por cerca de 90% da espessura da córnea, e por isso, em termos óticos é a camada mais importante. Habitualmente, é identificado com a própria córnea, pois as propriedades do seu material influenciam diretamente as propriedades de toda a córnea.

4.2 Derivação física

Para começar, vai assumir-se que a geometria da córnea é simétrica em relação ao eixo dos YY com raio R . É uma suposição um tanto quanto restritiva, contudo frequentemente adoptada e fornece uma boa aproximação à forma da córnea. Além disso, é importante impor a condição que a córnea é uma membrana, i.e., não tem momentos de flexão e tem tensão constante. Finalmente, é negligenciada a variação na distribuição da espessura, para deste modo, ser suficiente modelar apenas uma secção da córnea (ver [19]).

Assumindo a simetria radial, vamos considerar apenas a secção $h = h(x)[m](metros)$ ao longo da córnea e as respetivas forças de equilíbrio atuando sobre ela. Apenas se terá em conta a pressão constante $P[\frac{N}{m}]$, que atua numa direção normal à secção transversal da córnea. A tensão $T[N]$ atua tangencialmente à secção e a força elástica é proporcional a h . A força elástica é introduzida para modelar algumas características elásticas da córnea.

Vai supor-se que $h \in \mathbb{C}^2$, fixa-se a distância x ao centro de simetria e considera-se um pequeno incremento Δx . Definindo que a pressão é constante ao longo do segmento, obtemos a equação que descreve o equilíbrio das forças que atuam na direção de y :

$$T \sin(\theta) + T \sin(\psi) + P \cos(\theta) \Delta x - kh \Delta x = 0, \quad (4.1)$$

onde k é a constante de proporcionalidade da força elástica.

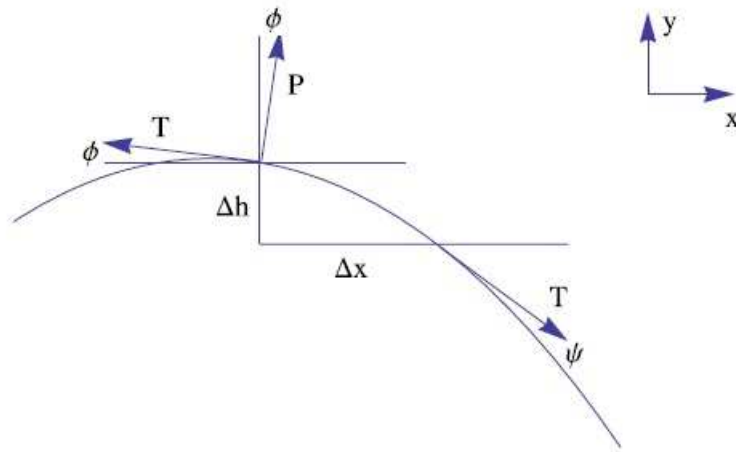


Figura 4.1: Secção transversal da córnea

Através da Figura 4.1 deduzimos as seguintes expressões:

θ = ângulo entre T (reta tangente a $h(x)$) e o eixo dos xx no ponto x ;

ψ = ângulo entre T (reta tangente a $h(x + \Delta x)$) e o eixo dos xx no ponto $x + \Delta x$.

Pela relação entre coordenadas cartesianas e polares sabemos que:

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \arctan(m),\end{aligned}$$

em que m é o declive da reta tangente a $h(x)$, ou seja, $h'(x)$.

Deste modo:

$$\theta = \arctan(h'(x)),$$

ou equivalentemente:

$$\begin{aligned}
& \tan(\theta) = h'(x) \\
\Leftrightarrow & \tan^2(\theta) = (h'(x))^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = (h'(x))^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{\sin^2(\theta)}{1 - \sin^2(\theta)} = (h'(x))^2 \\
\Leftrightarrow & \sin^2(\theta) = (h'(x))^2 - \sin^2(\theta) (h'(x))^2 \\
\Leftrightarrow & \sin^2(\theta) \left(1 + (h'(x))^2 \right) = (h'(x))^2 \\
\Leftrightarrow & \sin^2(\theta) = \frac{(h'(x))^2}{1 + (h'(x))^2} \\
\Leftrightarrow & \sin(\theta) = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos que:

$$\sin(\psi) = \frac{h'(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (h'(x + \Delta x))^2}}. \tag{4.3}$$

Para $\cos(\theta)$ temos:

$$\begin{aligned}
& \sin^2(\theta) = \frac{(h'(x))^2}{1 + (h'(x))^2} \\
\Leftrightarrow & 1 - \cos^2(\theta) = \frac{(h'(x))^2}{1 + (h'(x))^2} \\
\Leftrightarrow & \cos^2(\theta) = 1 - \frac{(h'(x))^2}{1 + (h'(x))^2} \\
\Leftrightarrow & \cos^2(\theta) = \frac{1 + (h'(x))^2 - (h'(x))^2}{1 + (h'(x))^2} \\
\Leftrightarrow & \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Uma vez que a componente vertical de tensão T no ponto x e no ponto $x + \Delta x$ têm sentidos opostos, substituindo as expressões (4.2),(4.3),(4.4) em (4.1), ficamos com:

$$\begin{aligned}
& -T \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} + T \frac{h'(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (h'(x + \Delta x))^2}} + \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} \Delta x - kh(x) \Delta x = 0 \\
\Leftrightarrow T & \left(\frac{h'(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (h'(x + \Delta x))^2}} - \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} \right) + \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} \Delta x - kh(x) \Delta x = 0. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Seja

$$f(x) = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}; \quad (4.6)$$

dividindo por Δx , escrevemos (4.5) como:

$$T \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) + \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} - kh(x) = 0; \quad (4.7)$$

tomando o $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ em (4.7):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} T \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) + \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} - kh(x) = 0,$$

é equivalente a :

$$T f'(x) + \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} - kh(x) = 0. \quad (4.8)$$

Voltando agora a (4.6) temos:

$$f'(x) = \frac{h''(x) \sqrt{1 + (h'(x))^2} - \left(\sqrt{1 + (h'(x))^2} \right)' h'(x)}{1 + (h'(x))^2}; \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{1 + (h'(x))^2} \right)' &= \left(\left(1 + (h'(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)' \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + (h'(x))^2 \right)' \left(1 + (h'(x))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} (2h'(x)h''(x)) \left(1 + (h'(x))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{h'(x)h''(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}; \quad (4.10)
\end{aligned}$$

substituindo (4.10) em (4.9) vem:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{h''(x)\sqrt{1+(h'(x))^2} - \frac{(h'(x))^2 h''(x)}{\sqrt{1+(h'(x))^2}}}{1+(h'(x))^2} \\
 &= \frac{h''(x) \left(\frac{1+(h'(x))^2 - (h'(x))^2}{\sqrt{1+(h'(x))^2}} \right)}{1+(h'(x))^2} \\
 &= \frac{h''(x)}{(1+(h'(x))^2)^{1+\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{h''(x)}{(1+(h'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Finalmente, usando a expressão (4.11) para $f'(x)$ em (4.8), obtemos:

$$-T \frac{h''(x)}{(1+(h'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} + kh(x) = \frac{P}{\sqrt{1+(h'(x))^2}}, \tag{4.12}$$

como um modelo final, não linear, para a descrição da geometria da córnea.

Vamos agora assumir a simplificação de que a deflexão da superfície corneana é pequena, isto é, em vez de (4.2), (4.3) temos:

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = -h'(x); \tag{4.13}$$

$$\sin(\psi) \approx \tan(\psi) = h'(x + \Delta x). \tag{4.14}$$

Supondo então as expressões (4.13), (4.14) para (4.1) temos:

$$T(h'(x + \Delta x) - h'(x)) + \frac{P}{\sqrt{1+(h'(x))^2}} \Delta x - kh(x) \Delta x = 0;$$

dividimos por Δx e tomamos o $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, resultando na equação simplificada que descreve a forma da córnea:

$$-Th''(x) + kh(x) = \frac{P}{\sqrt{1+(h'(x))^2}}. \tag{4.15}$$

A curva $h(x)$ é um meridiano de uma superfície de revolução que descreve a geometria da córnea. Naturalmente, impomos $h(r) = 0$, já que R é o raio da córnea e não queremos

ter elevação no bordo. A segunda condição de fronteira que estabelecemos é $h'(0) = 0$, isto porque desejamos ter uma conexão suave entre os meridianos na origem e a superfície (simétrica em relação ao eixo dos yy).

Finalmente, transformamos (4.15) numa equação adimensional, escolhendo novas variáveis:

$$h^* = \frac{h}{r}, \quad x^* = \frac{x}{r}, \quad (4.16)$$

e propomos uma equação não linear para a forma da córnea (omitindo os asteriscos para maior clareza de leitura):

$$-h''(x) + ah(x) = \frac{b}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}, \quad (4.17)$$

com as condições de fronteira:

$$h(1) = 0 \text{ e } h'(0) = 0, \quad (4.18)$$

onde $a = \frac{kR^2}{T}$ e $b = \frac{PR}{T}$.

Como pode ser verificado, tanto a como b são constantes reais positivas .

Capítulo 5

A equação fracionária de Bessel na topografia da córnea

No último capítulo integrante deste estudo proposto e após realizada a exposição de dois modelos não lineares, vai-se propor e estudar outro modelo para a descrição da topografia da córnea, também ele baseado na derivação física e na equação da membrana (ver [18]).

A solução encontrada é escrita na forma de série de potências absolutamente convergente. Esta solução é uma generalização da clássica função modificada de Bessel de ordem 0. Além disso, será analisado o comportamento da solução $B_0^\alpha(x)$ quando $x \rightarrow \infty$ e verificaremos que se reduz aos casos bem conhecidos com $\alpha = 0, 1$. Este modelo encaixa na geometria real da córnea com erros de baixa percentagem.

A primeira aproximação a esse modelo é:

$$T \sin(\theta) + T \sin(\psi) + (P - kh)\Delta x = 0, \quad (5.1)$$

em que T , P , θ , e ψ advêm da Figura 4.1 e da derivação física explicada no Capítulo 4.

Assumindo novamente a simplificação de que a deflexão da superfície corneana é pequena, ou seja, as expressões (4.13) e (4.14) para $\sin(\theta)$ e $\sin(\psi)$ respetivamente, a equação (5.1) fica escrita como:

$$T(h'(x + \Delta x) - h'(x)) + T \sin(\psi) + (P - kh)\Delta x = 0.$$

Dividindo por Δx e tomando o $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, obtemos a equação diferencial linear de 2ª ordem, para a descrição da geometria da córnea:

$$-Th''(x) + kh(x) = P; \quad (5.2)$$

ou de modo equivalente:

$$-\Delta h + ah = b, \quad h|_{\Omega} = 0, \quad (5.3)$$

com a e b constantes reais positivas adimensionais e Ω o domínio no qual a córnea está situada.

Neste caso, o modelo vai ser generalizado e vão ser usadas derivadas fracionárias em vez das clássicas.

Como resultado obtemos uma equação diferencial fracionária de Bessel modificada cuja solução tem um comportamento assintótico interessante.

Vamos assumir que a superfície córnea é simétrica em relação a y e que $h = h(r)$, onde $r \in [0, 1]$ e Ω é o círculo unitário. Assume-se também que h pode ser representado por uma série de potências convergente.

Reescrevendo (5.3) em coordenadas polares temos:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rh') + ah = b, \quad h'(0) = 0, \quad h(1) = 0. \quad (5.4)$$

Passagem para coordenadas polares

Nesta subsecção, vamos fazer a demonstração da passagem do operador Δ escrito em coordenadas cartesianas para coordenadas polares. Consideremos o modelo adotado descrito pela equação (5.3):

$$-\Delta h + ah = b.$$

Em matemática e física, o Laplaciano ou Operador de Laplace (ou ainda operador de Laplace-Beltrami), denotado por Δ , ou ∇^2 , sendo ∇ o operador nabla, é um operador diferencial de segunda ordem. O operador Laplaciano Δ no espaço euclidiano n -dimensional é definido como o divergente do gradiente:

$$\Delta \theta = \nabla^2 \theta = \nabla \cdot (\nabla \theta) = \text{div}(\text{grad}(\theta)).$$

Equivalentemente, o Laplaciano é a soma de todas as derivadas parciais simples de segunda ordem.

Definição 5.0.1 *Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, então, o Laplaciano de u é definido como:*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (5.5)$$

No caso em questão, em que $h = h(r)$, vamos considerar o Laplaciano de u para $n = 2$. Atendendo à relação entre as coordenadas cartesianas e coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

temos que $u = u(r, \theta)$, $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$ e aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (5.6)$$

e derivando novamente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Desenvolvendo o lado direito de (5.7) pela regra da derivada do produto resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Admitindo que as derivadas parciais mistas são contínuas em seus domínios, podemos aplicar o Teorema de Clairaut-Schwarz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x};$$

e reescrevendo (5.8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (5.9)$$

substituindo $\frac{\partial u}{\partial x}$ por (5.6) obtemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Analogamente faz-se o mesmo para a variável y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (5.11)$$

Cálculo dos coeficientes:

Atendendo à escrita de r e θ , vamos determinar os coeficientes que aparecem nas expressões (5.10) e (5.11), i.e., sabendo que:

$$\begin{aligned}
r &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right),
\end{aligned}$$

e

$$\arctan(u)' = \frac{u'}{1 + u^2},$$

vamos calcular as respetivas derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

Em ordem a x temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= 2x \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}; \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2}; \\
\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{r - \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^2} = \frac{r - \frac{x}{r} x}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}; \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{2r \frac{\partial r}{\partial x} y}{r^4} = \frac{2r \frac{x}{r} y}{r^4} = \frac{2xy}{r^4}; \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x - y}{r} \frac{y}{r^2} = -\frac{xy}{r^3}.
\end{aligned}$$

Analogamente em ordem a y vem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} \\
\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{r^3} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{-2xy}{r^4} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{xy}{r^3}.
\end{aligned}$$

Então, substituindo os coeficientes pelos respectivos valores e somando (5.10) e (5.11) obtemos que o operador Δ escrito em coordenadas polares é dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \left(\frac{x}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \left(\frac{-y}{r^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&+ \left(\frac{y}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{xy}{r^3} \frac{\partial u^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{xy}{r^3} \frac{\partial u^2}{\partial \theta \partial r} + \left(\frac{-x}{r^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{x^2 + y^2}{r^3}\right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{x^2 + y^2}{r^4}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{r^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $h = h(r)$, temos que $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0$ e

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \right) \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right],
\end{aligned}$$

resultando então na equação (5.4), ou seja,

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rh') + ah = b, \quad h'(0) = 0, \quad h(1) = 0.$$

■

A condição em $r = 0$, $h'(0) = 0$, garante-nos uma solução suave na origem, enquanto a condição $h(1) = 0$ determina a periferia da córnea. Multiplicando (5.4) por r^2 temos:

$$-r \frac{d}{dr}(rh') + r^2 ah = b \iff -r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) + r^2 ah = b. \quad (5.12)$$

Se tomarmos $x = r\sqrt{a}$ e $y = -h$,

$$dx = \sqrt{a}dr, \quad dy = -dh,$$

podemos reescrever (5.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{\sqrt{a}} \frac{d}{\frac{dx}{\sqrt{a}}} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \frac{-dy}{\frac{dx}{\sqrt{a}}} \right) - x^2 y &= \frac{x^2}{a} b \\ x \frac{d}{dx} (xy') - x^2 y &= \frac{x^2}{a} b, \end{aligned} \quad (5.13)$$

que é uma equação não homogénea de Bessel modificada de ordem 0.

Agora, generalizando este modelo e usando derivadas fracionárias em vez das clássicas, propõe-se a equação (ver [18]):

$$x^\alpha D_{0+}^\alpha (xy') - x^2 y = \frac{b}{a} x^2, \quad y'(0) = 0, \quad y(\sqrt{a}) = 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.14)$$

como modelo da geometria da córnea.

O operador D_{0+}^α denota a derivada fracionária de Riemann-Liouville definido como em (2.20) e uma vez que $0 < \alpha \leq 1$, a derivada fracionária de Riemann-Liouville entra em conformidade com a definição (2.22) :

$$D_{0+}^\alpha y := \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y(t) dt.$$

Uma vez que $xy'(x)|_{x=0} = 0$ e y é analítica, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo coincidem. A escolha de um valor adequado para a potência de x em (5.14) é muito importante e necessário para manter a consistência dimensional e o significado físico.

A equação (5.14) é designada de equação fracionária modificada de Bessel de ordem 0 em analogia à clássica.

Facilmente se verifica que $y_p(x) = -\frac{a}{b}$ é uma solução particular de (5.14). Como a solução de (5.14) é da forma: $y = y_h + y_p$, temos de descobrir a solução $y_h(x)$ da equação homogénea associada:

$$x^\alpha D_{0+}^\alpha (xy') = x^2 y, \quad y'(0) = 0, \quad y(\sqrt{a}) = 1 \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.15)$$

onde $y'(0) = 0$ vem do facto de y_p ser constante.

Procura-se uma solução para (5.15) na forma de série de potências que é:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (5.16)$$

Fazendo as devidas substituições obtemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}; \\ xy'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n; \\ D_{0+}^{\alpha}(xy') &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t y'(t) dt. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Substituindo $ty'(t)$ por (5.17) (com t em vez de x), temos que:

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}(xy') &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n \right) dt \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (x-t)^{-\alpha} n a_n t^n dt \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} n a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^n dt, \end{aligned}$$

e identifica-se $\frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^n dt$ como $(D_{0+}^{\alpha} t^n)(x)$.

Deste modo ficamos com:

$$D_{0+}^{\alpha}(xy') = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (D_{0+}^{\alpha} t^n)(x).$$

Como

$$(D_{0+}^{\alpha} t^n)(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha},$$

obtém-se:

$$D_{0+}^{\alpha}(xy') := \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

Substituindo agora em (5.15) resulta:

$$\begin{aligned} x^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha} &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} x + \sum_{n=2}^{\infty} na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \left[na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} - a_{n-2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Considerando $a_1 = 0$, ficamos com a seguinte relação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n \left[na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} - a_{n-2} \right] = 0,$$

o que implica:

$$\begin{aligned} na_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} - a_{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{n\Gamma(n+1)} a_{n-2} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{n^2\Gamma(n)} a_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{5.18}$$

O coeficiente $a_1 = 0$ encaixa na equação (5.16) já que $y'(0) = a_1 = 0$. Pelo critério da razão, verifica-se que a serie é absolutamente convergente.

Voltando agora à relação de recorrência dos coeficientes (5.18), vamos achar a solução de (5.15) que será denominada por $B_0^{\alpha}(x)$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} a_{n-2} \\
 &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \frac{\Gamma(n - \alpha - 1)}{(n - 2)^2 \Gamma(n - 2)} a_{n-4} \\
 &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2i - \alpha + 1)}{(n - 2i)^2 \Gamma(n - 2i)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2\frac{n}{2} + 2 - \alpha + 1)}{(n - 2\frac{n}{2} + 2)^2 \Gamma(n - 2\frac{n}{2} + 2)} a_{n-2\frac{n}{2}} \\
 &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2i - \alpha + 1)}{(n - 2i)^2 \Gamma(n - 2i)} \cdots \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{(2)^2 \Gamma(2)} a_0,
 \end{aligned}$$

para n par ($n = 2m, m \in \mathbb{N}_0$) e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2i - \alpha + 1)}{(n - 2i)^2 \Gamma(n - 2i)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2\frac{(n-1)}{2} + 2 - \alpha + 1)}{(n - 2\frac{(n-1)}{2} + 2)^2 \Gamma(n - 2\frac{(n-1)}{2} + 2)} a_{n-2\frac{(n-1)}{2}} \\
 &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \frac{\Gamma(n - \alpha - 1)}{(n - 2)^2 \Gamma(n - 2)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2i - \alpha + 1)}{(n - 2i)^2 \Gamma(n - 2i)} \cdots \frac{\Gamma(4 - \alpha)}{(3)^2 \Gamma(3)} a_1 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

para n ímpar ($n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}_0$), pois $a_1 = 0$.

Conclui-se então que:

$$a_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Uma vez que para $n = 2m, m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \frac{\Gamma(n - \alpha - 1)}{(n - 2)^2 \Gamma(n - 2)} \cdots \frac{\Gamma(n - 2i - \alpha + 1)}{(n - 2i)^2 \Gamma(n - 2i)} \cdots \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{2^2 \Gamma(2)} a_0 \\
&= \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{(2)^2 \Gamma(2)} \cdots \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{(2i)^2 \Gamma(2i)} \cdots \frac{\Gamma(n - \alpha - 1)}{(n - 2)^2 \Gamma(n - 2)} \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{n^2 \Gamma(n)} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) [2^2 \dots (2i)^2 \dots (n - 2)^2 n^2]^{-1} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \left[\frac{2^2}{2^2} \cdots \frac{(2i)^2}{2^2} \cdots \frac{(n - 2)^2}{2^2} \frac{n^2}{2^2} (2^2)^{\frac{n}{2}} \right]^{-1} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \left[1 \dots i^2 \dots \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 \left(\frac{n}{2} \right)^2 2^n \right]^{-1} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \left[\left(\frac{n}{2}! \right)^2 2^n \right]^{-1},
\end{aligned}$$

temos:

$$a_{2n} = \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \frac{1}{n!^2 2^{2n}}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Como $a_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$, $B_0^\alpha(x)$ tem a forma:

$$\begin{aligned}
y(x) &= B_0^\alpha(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \frac{1}{n!^2 2^{2n}} x^{2n},
\end{aligned}$$

e obtém-se:

$$B_0^\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \frac{1}{n!^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}. \quad (5.19)$$

E deste modo, a solução da equação homogénea (5.15) é dada por:

$$y_h(x) = C B_0^\alpha(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(2i - \alpha + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \frac{1}{n!^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}, \quad (5.20)$$

para alguma constante C .

A condição de fronteira $y'(0) = 0$ já está cumprida, no entanto, é necessário agora determinar C de modo a se verificar a outra condição: $y(\sqrt{a}) = 0$.

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p + y_h(x) = -\frac{b}{a} + C B_0^\alpha(x); \\ y(\sqrt{a}) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} + C B_0^\alpha(\sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{b}{a B_0^\alpha(\sqrt{a})}. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{b}{a} + C B_0^\alpha(x) \\ &= -\frac{b}{a} + \frac{b}{a B_0^\alpha(\sqrt{a})} B_0^\alpha(x) \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{B_0^\alpha(x)}{B_0^\alpha(\sqrt{a})} - 1 \right). \end{aligned}$$

Regressando agora às variáveis iniciais h e r , podemos reescrever a solução do problema de fronteira (5.4) como

$$h(r) = \frac{b}{a} \left(1 - \frac{B_0^\alpha(r\sqrt{a})}{B_0^\alpha(\sqrt{a})} \right). \quad (5.21)$$

Esta equação descreve a forma da córnea humana e pode ser visto em [18] que dá uma aproximação precisa quando comparado com dados reais.

Observação: Vemos que para $\alpha = 1$, (5.19) é uma forma generalizada da função de Bessel modificada de primeira espécie, já que $B_0^1 = I_0$ (2.13). Adicionalmente, vê-se que $B_0^0 = e^{\frac{x^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
B_0^0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(2i - 0 + 1)}{\Gamma(2i)} \right) \frac{1}{n!^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{2i\Gamma(2i)}{\Gamma(2i)} \right) \frac{1}{n!^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n 2i \right) \frac{1}{n!^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n! \frac{1}{n!^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} \frac{1}{n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n \\
&= e^{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

A função fracionária modificada de Bessel $B_0^\alpha(x)$ definida em (5.19) tem um comportamento muito interessante quando $x \rightarrow +\infty$. Veremos que se trata de uma generalização dos resultados clássicos da teoria das assíntotas, nomeadamente os baseados no método de Laplace para integrais assintóticos. A grande questão é estarmos a lidar com equações diferenciais-integrais que normalmente acarretam problemas. Primeiro será provado um lema, que se usará mais à frente na análise ao comportamento assintótico da função.

Lema 5.0.2 : *Seja $F_\mu(x) = \int_0^1 t^\mu e^{-xt} dt$, então $F_\mu(x)$ tem o seguinte comportamento quando $x \rightarrow +\infty$:*

$$F_\mu(x) \sim x^{-(\mu+1)} \Gamma(\mu+1).$$

Prova: Através da mudança de variável ($s = xt$) podemos escrever o integral, definindo $F_\mu(x)$ como:

$$\begin{aligned}
s &= xt \Rightarrow dt = \frac{1}{x} ds; \quad t \in [0, 1] \Rightarrow xt \in [0, x] \\
F_\mu(x) &= \int_0^x \left(\frac{s}{x}\right)^\mu \frac{e^{-s}}{x} ds \\
&= x^{-(\mu+1)} \int_0^x s^\mu e^{-s} ds \\
&= x^{-(\mu+1)} \left(\int_0^\infty s^\mu e^{-s} ds - \int_x^\infty s^\mu e^{-s} ds \right) \\
&= x^{-(\mu+1)} \left(\Gamma(\mu+1) - \int_x^\infty s^\mu e^{-s} ds \right). \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Integrando $\int_x^\infty s^\mu e^{-s}$ por partes temos:

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty s^\mu e^{-s} &= [-s^\mu e^{-s}]_x^\infty + \int_x^\infty \mu s^{\mu-1} e^{-s} ds \\
&= x^\mu e^{-x} + \mu \int_x^\infty s^{\mu-1} e^{-s} ds \\
&= x^\mu e^{-x} + \mu \left(x^{\mu-1} e^{-x} - (\mu-1) \int_x^\infty s^{\mu-2} e^{-s} ds \right) \\
&= x^\mu e^{-x} + \mu \left(x^{\mu-1} e^{-x} - (\mu-1) \left(x^{\mu-2} e^{-x} + (\mu-2) \int_x^\infty s^{\mu-3} e^{-s} ds \right) \right) \\
&= \dots \\
&= e^{-x} (x^\mu + \mu x^{\mu-1} + \mu(\mu-1)x^{\mu-2} + \dots + \mu(\mu-1)\dots(\mu-i)x^{\mu-i-1} + \dots).
\end{aligned}$$

Substituindo agora em (5.23), obtemos a seguinte expressão para $F_\mu(x)$:

$$F_\mu(x) = x^{-(\mu+1)} \Gamma(\mu+1) - e^{-x} (x^{-1} + \mu x^{-2} + \mu(\mu-1)x^{-3} + \dots + \mu(\mu-1)\dots(\mu-i+2)x^{-i} + \dots).$$

Note-se que:

$$\mu(\mu-1)\dots(\mu-i) = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-i)\dots}{(\mu-i-1)(\mu-i-2)\dots} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-i)},$$

resultando na seguinte expressão para $F_\mu(x)$:

$$\begin{aligned}
F_\mu(x) &= x^{-(\mu+1)}\Gamma(\mu+1) - e^{-x} \left(\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}x^{-1} + \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)}x^{-2} + \dots + \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-i+2)}x^{-i} + \dots \right) \\
&= x^{-(\mu+1)}\Gamma(\mu+1) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+1)}x^{-1-k} \\
&= x^{-(\mu+1)}\Gamma(\mu+1) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+1)} \frac{1}{x^{k+1}},
\end{aligned}$$

e uma vez que o segundo termo é exponencialmente negativo, vemos que para $x \rightarrow +\infty$, o comportamento de $F_\mu(x)$ é definido pela ordem do primeiro termo, concluindo assim a prova. ■

Pelo facto de $xy'(x)|_{x=0} = 0$, podemos transformar (5.15) numa equação diferencial integral de Volterra, usando a propriedade (2.36) para a composição dos operadores D^α e I^α :

$$\begin{aligned}
D_0^\alpha(xy'(x)) &= x^{2-\alpha}y(x) \\
\Leftrightarrow (I_0^\alpha D_0^\alpha(xy'(x)))(x) &= (I_0^\alpha x^{2-\alpha}y(x))(x) \\
\Leftrightarrow xy'(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{2-\alpha}y(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\
\Leftrightarrow y'(x) &= \frac{1}{x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{2-\alpha} y(t) dt. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Uma vez que queremos estudar o comportamento da função para valores de x muito elevados, vai efetuar-se a mudança de variável $s = \frac{t}{x}$, de modo a tornar o intervalo de integração constante (limitado).

$$\begin{aligned}
s &= \frac{t}{x} \implies dt = x ds \\
y'(x) &= \frac{1}{x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xs)^{\alpha-1} (xs)^{2-\alpha} y(xs) x ds \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{3-\alpha} (x(1-s))^{\alpha-1} s^{2-\alpha} y(xs) ds \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^2 s^{2-\alpha} (1-s)^{\alpha-1} y(xs) ds \\
&= \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{2-\alpha} (1-s)^{\alpha-1} y(xs) ds. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Com base na última observação, vamos assumir que a solução de (5.24) é da forma:

$$y(x) = f(x)e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}}, \quad (5.26)$$

onde f e λ terão de ser determinados. Substituindo (5.26) em (5.25) resulta:

$$y'(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{2-\alpha}(1-s)^{\alpha-1} f(xs) e^{\frac{x^\lambda}{\lambda} s^\lambda} ds.$$

Note-se que para x elevado, o integral é maioritariamente influenciado pela variável no termo exponencial, tomando o seu valor máximo em $s = 1$.

De forma a mudar este máximo para o limite inferior, fazemos a substituição $t = 1 - s$ e obtemos:

$$y'(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{2-\alpha} t^{\alpha-1} f(x(1-t)) e^{\frac{x^\lambda}{\lambda} (1-t)^\lambda} dt. \quad (5.27)$$

Tal como no método de Laplace para o comportamento assintótico de integrais (ver p.ex. [3]), quando $x \rightarrow +\infty$, a grande contribuição para o integral (5.27) provém da vizinhança do maximizante do termo exponencial $e^{\frac{x^\lambda}{\lambda} (1-t)^\lambda}$, que é quando t está próximo de 0.

Usando este facto, vai-se aplicar o Teorema de Taylor para escrever $(1-t)^\lambda$ em torno do ponto $x = 0$. Tomando apenas os dois primeiros termos, podemos fazer uma aproximação válida para x elevado.

$$\begin{aligned} (1-t)^\lambda &= f(0) + f'(0)(t-0) + \dots \approx 1 - \lambda t; \\ f(x(1-t)) &= f(x) + f'(x)(x(1-t) - x) + \dots \approx f(x) - x f'(x)t; \end{aligned}$$

resultando na equação:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{2-\alpha} t^{\alpha-1} (f(x) - x f'(x)t) e^{\frac{x^\lambda}{\lambda} (1-\lambda t)} dt \\ &\approx \frac{x}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} \left(f(x) \int_0^1 (1-t)^{2-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-x^\lambda t} dt - x f'(x) \int_0^1 (1-t)^{2-\alpha} t^\alpha e^{-x^\lambda t} dt \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para o primeiro integral de (5.28) vamos aproximar $(1-t)^{2-\alpha} = f(0) + f'(0)(t-0) + \dots \approx 1 - (2-\alpha)t$, enquanto que no segundo integral, aproxima-se $(1-t)^{2-\alpha} \approx 1$. Esta opção é justificada pelo facto da maior concentração da área de (5.28) estar em redor do ponto $t = 0$, resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned}
y'(x) &\approx \frac{x}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} \left(f(x) \int_0^1 (1 - (2 - \alpha)t) t^{\alpha-1} e^{-x^\lambda t} dt - x f'(x) \int_0^1 1 t^\alpha e^{-x^\lambda t} dt \right) \\
&\approx \frac{x}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} \left[f(x) \left(\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-x^\lambda t} dt - (2 - \alpha) \int_0^1 t^\alpha e^{-x^\lambda t} dt \right) - x f'(x) \int_0^1 t^\alpha e^{-x^\lambda t} dt \right]. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Usando o Lema 5.0.2 podemos escrever a equação do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
y'(x) &\approx \frac{x}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} [f(x) (F_{\alpha-1}(x^\lambda) - (2 - \alpha)F_\alpha(x^\lambda)) - x f'(x) F_\alpha(x^\lambda)] \\
&\sim \frac{x}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} [f(x) (x^{-\lambda\alpha}\Gamma(\alpha) - (2 - \alpha)x^{-\lambda(\alpha+1)}\Gamma(\alpha + 1)) - x f'(x) x^{-\lambda(\alpha+1)}\Gamma(\alpha + 1)] \\
&\sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} [(x^{-\lambda\alpha+1}\Gamma(\alpha) - \alpha(2 - \alpha)x^{-\lambda(\alpha+1)+1}\Gamma(\alpha)) f(x) - \alpha x^{2-\lambda(\alpha+1)}\Gamma(\alpha) f'(x)] \\
&\sim e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} [(x^{-\lambda\alpha+1} - \alpha(2 - \alpha)x^{-\lambda(\alpha+1)+1}) f(x) - \alpha x^{2-\lambda(\alpha+1)} f'(x)].
\end{aligned}$$

Notando agora que:

$$y'(x) = \left(f(x) e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} \right)' = f'(x) e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} + x^{\lambda-1} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} f(x),$$

obtemos finalmente a seguinte equação diferencial para f :

$$f'(x) e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} + x^{\lambda-1} e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} f(x) = e^{\frac{x^\lambda}{\lambda}} [(x^{-\lambda\alpha+1} - \alpha(2 - \alpha)x^{-\lambda(\alpha+1)+1}) f(x) - \alpha x^{2-\lambda(\alpha+1)} f'(x)]$$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha x^{2-\lambda(\alpha+1)}) f'(x) = (x^{-\lambda\alpha+1} - x^{\lambda-1} - \alpha(2 - \alpha)x^{-\lambda(\alpha+1)+1}) f(x),$$

e vemos que a solução de $(2 - \lambda(\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\alpha+1})$ é uma escolha adequada para o valor de λ , não só pela necessidade que f tenha crescimento algébrico, mas também porque simplifica a equação em:

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha) f'(x) &= \left(x^{-\frac{2}{\alpha+1}\alpha+1} - x^{\frac{2}{\alpha+1}-1} - \alpha(2 - \alpha)x^{-2+1} \right) f(x) \\
\Leftrightarrow (1 + \alpha) f'(x) &= \left(x^{-\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}} - x^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}} - \alpha(2 - \alpha)\frac{1}{x} \right) f(x) \\
\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\frac{\alpha(2 - \alpha)}{\alpha + 1} \frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{f} \frac{df}{dx} &= -\frac{\alpha(2 - \alpha)}{\alpha + 1} \frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{f} df &= -\frac{\alpha(2 - \alpha)}{\alpha + 1} \frac{1}{x} dx.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da equação obtém-se:

$$\begin{aligned} \ln(f) &= -\frac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha+1} \ln(x) + c \\ \Leftrightarrow \quad \ln(f) &= \ln\left(x^{-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha+1}}\right) + c, \end{aligned}$$

resultando na solução geral:

$$f(x) = Cx^{-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha+1}}. \quad (5.30)$$

Conclui-se que a solução $B_0^\alpha(x)$ da equação diferencial fracionária de Bessel modificada (5.14) tem o seguinte comportamento assintótico, descrito pelo termo principal, quando $x \rightarrow +\infty$:

$$B_0^\alpha(x) \sim x^{-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha+1}} \exp\left(x^{\frac{2}{1+\alpha}}\right). \quad (5.31)$$

Observação: Vemos que para $\alpha = 0, 1$ a forma assintótica (5.31) reduz-se às fórmulas bem conhecidas para $B_0^0 = e^{\frac{x^2}{2}}$ e $B_0^1 = I_0 \sim x^{-\frac{1}{2}}e^x$ (ver p.ex. [2]).

Bibliografia

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, New York, 1999.
- [2] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1965.
- [3] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, NY, Springer New York, 1999.
- [4] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [5] A. Cabada, J. Cid, On a class of singular Sturm-Liouville periodic boundary value problems, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12** (2011), pp. 2378–2384.
- [6] M. Caputo, Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **13** (1967), pp. 529–539.
- [7] P.G. Ciarlet, Mathematical elasticity I: three-dimensional elasticity, *SIAM Rev.*, **34**(3) (1992), pp. 513–514.
- [8] P.G Ciarlet, *Mathematical Elasticity III: Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [9] P.G Ciarlet, *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*, Springer, Dordrecht, 2005.
- [10] V. J. Ervin, N. Heuer, J. P. Roop, Numerical approximation of a time dependent, nonlinear, space-fractional diffusion equation, *SIAM J.Numer. Anal.*, **45**(2) (2007), pp. 572-591.
- [11] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Essentials of Fractional Calculus*, 2000, Maphysto Center (<http://www.maphysto.dk/oldpages/events/LevyCAC2000/MainardiNotes/fm2k0a.ps>).

- [12] N. Heymans, I. Podlubny, Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, *Rheologica Acta*, **45** (2006) , pp. 765–771.
- [13] H. Kasprzak, D.R. Iskander, Approximating ocular surfaces by generalized conic curves, *Ophthal. Physiol. Opt.*, **26** (2006), pp. 602–609.
- [14] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [15] V. Mahajan, *Aberration Theory Made Simple*, SPIE Optical Engineering Press: Bellingham, WA, 1991.
- [16] V. Mahajan, *Optical Imaging and Aberrations Part I*, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, WA, 1998.
- [17] J. Nee, Nonlinear integral equation from the BCS gap equations of superconductivity, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11** (2010), pp. 190–197.
- [18] W. Okrasinski, L. Plociniczak, On fractional Bessel equation and the description of corneal topography, arXiv:1201.2526v2 [math. CA], 2012.
- [19] W. Okrasinski, L. Plociniczak, A nonlinear mathematical model of the corneal shape, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**(3) (2012), pp. 1498–1505.
- [20] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York-London, 1974.
- [21] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [22] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.
- [23] M.A. Rosales, M. Juárez-Aubry, E. López-Olazagasti, J. Ibarra, E. Tepichín, Anterior corneal profile with variable asphericity, *Applied Optics*, **48**(35) (2009), pp. 6594–6599.
- [24] M.M. Rodrigues, N. Vieira, S. Yakubovich, *Operational calculus for Bessel's fractional equation*, Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications, **229**, Birkhäuser, Basel, 2013.

- [25] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publ., New York and London, 1993.
- [26] J.P. Trevino , J.E. Gómez-Correa , D.R. Iskander , S. Chávez-Cerda, Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics, *Ophthalmic Physiol Opt.*, **33** (2013), pp. 394–402.
- [27] P.Zhuang, F.Liu, V.Anh, I. Turner, New solution and analytical techniques of the implicit numerical method for the anomalous subdiffusion equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **46**(2) (2008), pp. 1079–1095.